ELŐADÓ: HAJNAL PÉTER

JEGYZETELŐ: BORBÉLY ZSUZSANNA

2014.04.07

Kombinatorika- Elmélet

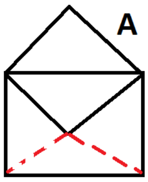
Emlékeztető: Egy vonal egy G gráfban egy olyan séta, amely minden élen legfeljebb egyszer halad át. Egy vonalat szemléltethetünk úgy, hogy az egyik csúcsból kiindulva ceruzánkat egy élén végighúzzunk, majd az így elért pontból egy másik élt rajzolunk meg és így tovább. Ha az eljárás folyamán ügyelünk arra, hogy egyetlen élt se húzzunk duplán, akkor ceruzánk egy vonalat követett és közben lerajzolta a gráf egy részét. Természetes kérdés (és ismert fejtörő), hogy egy gráf ábra mikor rajzolható meg így, dupla áthúzás és a ceruzánk felemelése nélkül. Ez a kérdés ekvivalens azzal, hogy mikor van a gráfban olyan vonal, amely a gráf összes csúcsát és élét tartalmazza. Ilyen vonal létezésének vizsgálata a legrégebbi gráfelméleti problémára tekint vissza. Eredetileg a probléma a Königsberg városában merült fel. A város egy folyó partjain és két szigetén épült. A partok és szigetek között 7 híd van. A város lakói között fejtörő kérdés volt, hogy lehet-e találni sétautat úgy, hogy minden hídon pontosan egyszer haladjunk át. Ez ekvivalens azzal, hogy a térképet leíró gráfban létezik-e az összes élt tartalmazó vonal. A probléma megoldása Euler nevéhez fűződik. Róla nevezték el a probléma mögött rejlő fogalmat.

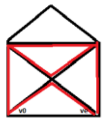
Def: Legyen G gráf és $S\{v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,\dots e_k,v_k\}$ vonal Euler vonal, ha $\{e_1,e_2,\dots,e_k\}$ és $\{v_o,v_1,\dots v_k\} = V(G)$ – az élek kiadják az él halmazt a csúcsok pedig a csúcshalmazt

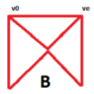
Megjegyzés: Euler vonal: Olyan séta, amely során minden élen pontosan egyszer halad át és minden csúcsot érintünk.

Def: S séta esetén (jelölést lásd fent) $v_0=v_k$,(azaz kiinduló csúcsba érünk vissza a séta végén), ez esetben azt mondjuk, hogy S zárt séta. Zárt Euler vonal esetén a séta kezdő és végpontja azonos.

Def: Mohó vonalnövelés = sétálás, amikor minden lépésnél vigyázunk, hogy ne ismételjük az élt. – Szükségszerűen befejeződik/ beáll. Hossza ≤ $|E (G)|$ (él szám) példa: A







Az ábrán vonalnövelés A-ból elakadásig folytatás nem lehetséges.

Def: G gráf mohó vonal növelése → G gráf B bejárt rész

- csúcsok == V(G)
- élek séta/vonal élei
- végpontok /illeszkedés: mint G-ben

Lényeges észrevétel:

Legyen G egy gráf, v eleme V(G)-nek egy csúcs v-ből kiindulva végezzük el a mohó vonalnövelési eljárást. Tegyük fel, hogy az eljárás egy u csúcsba vezető vonallal akad el. Ekkor v fokszámának paritása szerint a következő két eset lehetséges:

(1) Ha d(v) páros, akkor minden csúcs B foka páros

(2) Ha d(v) páratlan, akkor V egy V-től különböző páratlan fokú csúcs és minden más csúcs B foka páros

Bizonyítás:

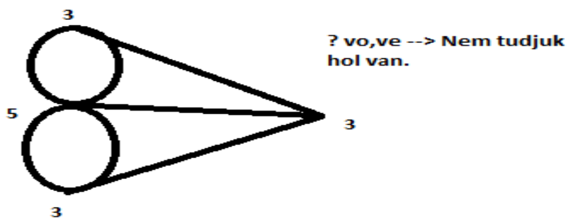
(1) a, Legyen x egy tetszőleges csúcs a x= v_0 , ami nem egyenlő v_e-vel → a séta kiindul x-ből és valahányszor áthalad rajta 1+ páros = páratlan → az áthaladás a B fokot kettővel növeli, nem itt állunk meg, így a B fok

b, x=v_0=v_e →A B fok 1+páros+1

c,x =$v_{e,}$ ami nem egyenlő v_0-val, tehát ugyanaz, mint az a eset

(2) x v_0=v_e –től is különbözik, azaz csak áthaladás történik → séta valahányszor álhalad x-en→minden áthaladás a B fokot kettővel növeli, így B fok páros, az állítás adódott.

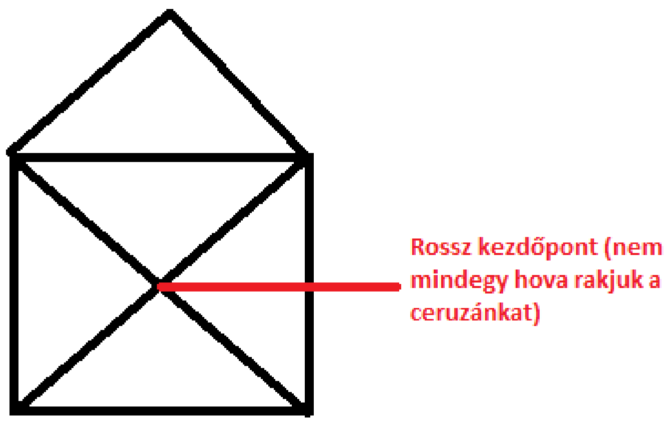
Az észrevétel megoldja a Königsbergi hidak problémáját. A válasz nemleges, nem lehet a gráfunkban Euler-vonal. Ha lenne, akkor ezt bejárva egy teljes gráfot kapunk. Az észrevétel alapján 0(v_0=v_e) vagy 2($v_0 \neq v_e$) páratlan fokú csúcs van a gráfunkban. Az ábra alapján ez nem igaz.



Euler tétel: a, Legyen G egy gráf. G-nek akkor és csak akkor van zárt Euler-vonala, ha G összefüggő és minden fokszáma páros.

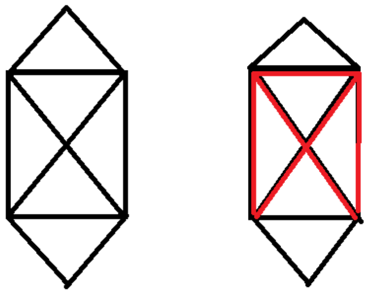
b, G-ben akkor és csak akkor van NEM záródó Euler-vonal, ha 2db páratlan fokú csúcs van és összefüggő

Megjegyzés. b, esetben a bizonyításból kiolvasható, hogy a kiinduló és az utolsó csúcs az egyik páratlan fokú csúcs.



Bizonyítás: => (a korábbiak alapján belátjuk) Euler-körvonal létezése esetén gráfunk összefüggő (a vonal az összes csúcsot meglátogatja) a körvonal kiinduló=végpontján kívüli csúcsok esetén mindig áthaladunk (be, majd ki haladunk), ami párba állítja a csúcsra illeszkedő éleket. A kiinduló=végpontra az első kilépés és az utolsó belépésen túl mindig áthaladás történik, így itt is adódik a páros fokszám

<= ha tudjuk, hogy minden fok páros és gráfunk összefüggő. Kezdjünk el mohó vonalnövelést elakadásig.



Legyen N a be nem járt élek gráfja(piros gráf=N)

Észrevétel: B szükségszerűen a kiinduló csúcsban akad el és így minden foka páros.Tehát N is páros minden fokánál. Ha a bejárt rész nem egyezik meg G-vel akkor van a sétának olyan x csúcsa, ahol bejárt és nem bejárt él találkozik. x az eredeti séta megszakítható és egy betoldással megnövelhető. A betoldás egy x-ből induló N-be haladó mohó vonalnöveléssel kapható meg. Az észrevételnek köszönhetően ez szükségszerűen x-ben akad el, így a megszakított vonal egy hosszabbításnak szolgál. Ezt a betoldási módszert addig alkalmazzuk, amíg egy Euler-vonalhoz nem jutunk.